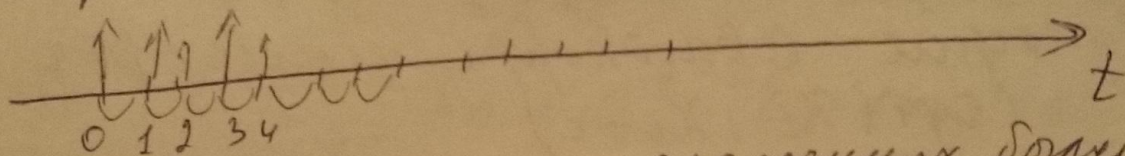


Временные ряды

серия наблюдений есть последовательность значений некоторой переменной через равные промежутки времени



в пространственных переменных доли карт (X, Y)

здесь $(X_1, \dots, X_n)$ - статистически зависимая ср. распределение:

$$F(V_1, V_2, \dots, V_n) = P\{X_1 < V_1, X_2 < V_2, \dots, X_n < V_n\}$$

совместная плотность распределения

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Стационарные временные ряды

ряд X_t - строго стационарный (стат. в узком смысле), если $t_m: m \leq n$
совместное распределение $\tau: m + \tau \leq n$

$$F(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) = F(X_{t_1 + \tau}, \dots, X_{t_m + \tau})$$

$$\text{и } P(X_{t_1}, \dots, X_{t_m}) = P(X_{t_1 + \tau}, \dots, X_{t_m + \tau})$$

св-ва нашего врем. ряда не меняются от времени

стат. в широком смысле

$$1) E(X_t) = \mu$$

$$2) D(X_t) = \sigma^2 \quad \text{т.е. условие homoskedasticity}$$

$$3) \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$$

матрицу узкой и широкой частотного соответствия

В узкой: $\text{Cov}(X_t, X_{t+\tau}) = \gamma(\tau)$

$$\rho(X_t, X_{t+\tau}) = \rho(\tau)$$

$$\rho(0) = 1$$

Функция автокорреляции $\rho(\tau) = \text{Cov}(X_t, X_{t+\tau})$

если $X_t \sim N(\mu, \sigma^2)$, то бел-
гаусовский

свойства:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(\tau) \in [-1, 1] \\ \rho(\tau) = \rho(-\tau) \\ \rho(0) = 1 \end{array} \right.$$

ε_t - белый гаус. шум:

такой же ε_t стан, что $E(\varepsilon_t) = 0$
 $D(\varepsilon_t) = \sigma^2$

$$\text{и } \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$$

для него $\rho(\tau) = 0 \quad \forall \tau \neq 0$ - т.е.
процесс бел шум: $E(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+\tau}) = 0$

Процесс автокорреляции 1 порядка
AR(1)

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t - \text{белый гаус. шум}$$

X_0 - нек. сл. величина

$$a \neq 0$$

$$1) E(X_t) = a E(X_{t-1})$$

бывает случай, если $E(X_t) = 0$

Решение задачи

$$X_t = a X_{t-1} + \varepsilon_t = a(a X_{t-2} + \varepsilon_{t-1}) + \varepsilon_t = \dots =$$

$$= a^t X_0 + a^{t-1} \varepsilon_1 + \dots + a \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_{t-1} = a^{t-1} X_0 + a^{t-2} \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_{t-1}$$

$$X_1 = a^1 X_0 + \varepsilon_1 = a X_0 + \varepsilon_1$$

X_0 - независим с $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$, то

$$\text{Cov}(X_0, \varepsilon_1) = 0 \quad \text{Cov}(X_0, \varepsilon_2) = 0 \dots$$

$$\text{Cov}(X_0, \varepsilon_n) = 0$$

$$V(X_t) = V(a X_{t-1} + \varepsilon_t) =$$

$$= a^2 V(X_{t-1}) + V(\varepsilon_t) = a^2 V(X_{t-1}) + \sigma_\varepsilon^2$$

используем свойство:

$$V(X_0) = V(X_t) = \sigma_X^2 \quad t = 1, n$$

$$\sigma_X^2 = a^2 \sigma_X^2 + \sigma_\varepsilon^2$$

используем условие нормальности: $a < 1$

$$\text{т. е. } \sigma_X^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - a^2}$$

Доказательство: 1) $\text{Cov}(X_t, X_{t+1}) = \frac{a^2}{1 - a^2} \cdot \sigma_\varepsilon^2$

2) $\text{Corr}(X_t, X_{t+1}) = a$

т. е. пред $X_t = a X_{t-1} + \varepsilon$ — случай, если

1) $a < 1$

2) X_0 не корр. с ε_t , $t = \overline{1, n}$

3) $E(X_0) = 0$

4) $V(X_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a^2}$

21.10.2017

AR(1)

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t - \text{белый шум}$$

$$E\varepsilon_t = 0 \quad \text{Var } \varepsilon_t = \sigma^2$$

$$\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$$

$$X_0 - \text{сл. величина}, \quad \alpha < 1$$

$$X_0 - \text{не коррелирует с } \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$$

$$E(X_0) = 0$$

$$\text{Var}(X_0) = 0$$

$$\frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1-\alpha^2) \sigma_\varepsilon^2}$$

$$E(Y_t) = \mu \neq 0$$

$$X_t = Y_t - \mu$$

$$Y_t - \mu = \alpha(Y_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad t = \overline{1, n}$$

$$Y_t = \alpha Y_{t-1} + \delta + \varepsilon_t$$

$$\delta = \mu(1-\alpha)$$

$$\rho(\tau) = \frac{\gamma(\tau)}{\gamma(0)} = \text{corr}(K_t, K_{t+\tau})$$

$$\gamma(\tau) = \text{cov}(K_t, K_{t+\tau})$$

$$\rho(0) = 1$$

$$\tau = 1: \gamma(1) = E(K_t \cdot K_{t+1}) =$$

$$= E[(a\pi_{t-1} + \varepsilon_t) \cdot \pi_{t-1}] = a\gamma(0)$$

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = a, \quad a < 0$$

Чем больше стремится номер 0 процесс наблюдений, тем больше зависимость от начальной точки

$t \rightarrow 0$, или процесс не будет стационарным при $a < 1$

$$\pi_t = a\pi_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\pi = \pi_0 - \text{const}$$

$$\pi_t = a^t \pi_0 + a^{t-1} \varepsilon_1 + a^{t-2} \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_t$$

$$E(\pi_t) = a^t \pi_0$$

$$\text{Var}(\pi_t) = E[(\pi_t - E\pi_t)^2] = E\pi_t^2 - (E\pi_t)^2$$

$$= E\pi_t^2 - a^{2t} \pi_0^2 = E(a^{2t} \pi_0^2 +$$

$$+ a^{2(t-1)} \varepsilon_1^2 + a^{2(t-2)} \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_t^2) -$$

$$- a^{2t} \pi_0^2 = a^{2t} \pi_0^2 + a^{2(t-1)} \text{Var} \varepsilon_1^2 + \dots + \text{Var} \varepsilon_t^2 -$$

$$- a^{2t} \pi_0^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - a^{2t}}{1 - a^2}$$

$$\boxed{\text{Var} \varepsilon_t = E\varepsilon_t^2 - (E\varepsilon_t)^2 = E\varepsilon_t^2}$$

$$\text{cov}(\pi_t, \pi_{t+2}) = \frac{a^2(1 - a^{2t})}{1 - a^2} \sigma_\varepsilon^2$$

$$E x_t = a^t x_0 \rightarrow 0$$

$$\text{cov} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{a^2 \sigma_\varepsilon^2}{1-a^2}$$

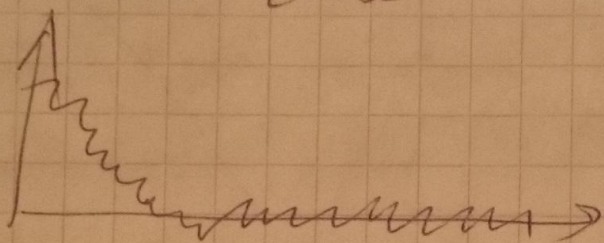
$$E(x_t) = a^t x_0 \rightarrow 0$$

$$\text{Cov} \rightarrow \sigma_\varepsilon^2$$

Если x_0 - фиксировано, то процесс x_t стационарен, т.е. стационарен

Доказ: $\text{Cov} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-a^2}$?

мб как у
Малова



Процесс авторегрессии порядка p
AR(p)

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t$$

ε_t - белый шум

L - оператор запаздывания
(оператор лаг)

$$L x_t = x_{t-1}$$

$$L^k x_t = x_{t-k}$$

$$a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \dots + a_p x_{t-p} =$$

$$= a_1 L x_t + a_2 L^2 x_t + \dots + a_p L^p x_t$$

запишем в виде $1 - \alpha$

$$\alpha(L) x_t = \varepsilon_t$$

$$\alpha(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p)$$

Для того, чтобы $\sqrt{AR(p)}$ была
стационарной, все решения
 $\alpha(z) = 0$ должны лежать вне
единичного круга $|z| > 1$

$$\alpha(z) = 1 - az \quad z = \frac{1}{a} \Rightarrow a < 1$$

$$x_t = \frac{1}{\alpha(L)} \cdot \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \varepsilon_{t-j}$$

в виде сконвергентной суммы

при этом $\sum_{j=0}^{\infty} |\beta_j| < \infty$ т.е. не расходясь

$$\Rightarrow E(x_t) = 0$$

если корни не 0 или 1. Ошибка,
то рассматривается

$$\alpha(L)(x_t - \mu) = \varepsilon_t$$

$$\alpha(L)x_t = \delta + \varepsilon_t, \text{ где } \delta = (\mu - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_p)$$

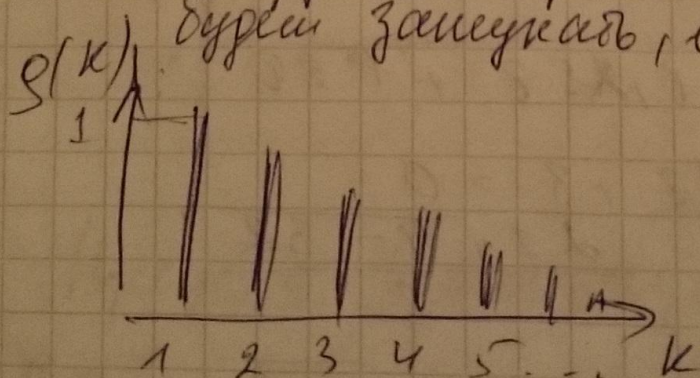
$$\text{и тогда } E(x_t) = \mu = \frac{\delta}{(1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_p)}$$

для $AR(1)$:

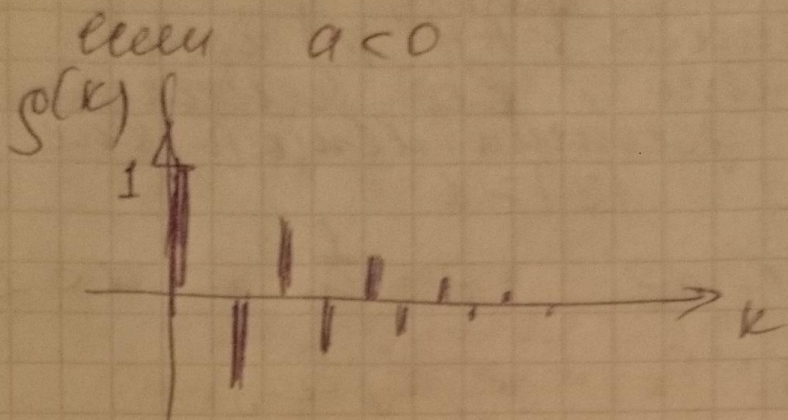
$$\gamma(k) = \text{Cov}(x_t, x_{t+k}) = a^k \quad \forall k = 0, 1, \dots$$

$$0 < a < 1$$

корреллограмма (график корреляции)
будет затухать, если $a > 0$



$$a > 0$$



все время ур-ий Юла-Токера

AR(p) и $x_t - k$

$$\gamma(k) = \text{Cov}(x_t, x_{t-k})$$

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

$$\gamma(k) = a_1 \gamma(k-1) + \dots + a_p \gamma(k-p), \quad k > 0$$

$$\rho(k) = a_1 \rho(k-1) + \dots + a_p \rho(k-p), \quad k > 0$$

все автокорреляции с p и выше = 0

(N1) $x_t = 4,375 + 0,25 x_{t-1} - 0,125 x_{t-2} + \varepsilon_t$

проверять ряд на стационарность

$$\phi(z) = 0$$

$$x_t (1 - \cancel{0,25z^{-1}} + 0,25z^{-1} - 0,125z^{-2}) = 4,375 +$$

$$0,125z^{-2} - 0,25z^{-1} + 1 = 0$$

$$z^2 - 2z + 8 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 32}}{2}$$

$$= 1 \pm \sqrt{-4}$$

$|z| < 1 \rightarrow$ стационарный

$$E(x_k) = \mu = \frac{s}{1 - a_1 - a_2} =$$

$$= \frac{4,375}{1 - 0,25 + 0,125} \approx 5$$

$$g(0) = \frac{x(0)}{g(0)} = 1$$

$$g(1) = a_1 g(0) + a_2 g(-1)$$

$g(k) = a_1 g(k-1) + a_2 g(k-2)$

$g(-1) = g(1)$ - т.к. симметричная

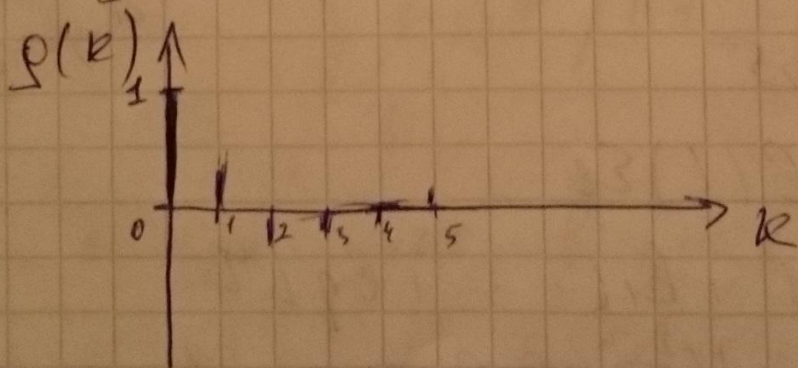
$$\Rightarrow g(1) = \frac{a_1 g(0)}{1 - a_2} = \frac{0,25}{1 + 0,125} = 0,222$$

$$g(2) = a_1 g(1) + a_2 g(0) = 0,25 \cdot 0,222 - 0,125 = -0,069 \quad \underline{0,125}$$

$$g(3) = -0,045$$

$$g(4) = -0,003$$

$$g(5) = 0,005$$



Прямое суммирование среднее $MA(q)$

$$X_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q} \quad b_q \neq 0$$

... : процесс на 2 периодах
 ε_t - белый шум

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

если хотим получить (среднее $E \neq 0$)

$$x_t - \mu = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

$$x_t = \mu + \varepsilon_t + \dots$$

$$\text{если } \mu = 0, q = 0 \rightarrow x_t = \varepsilon_t$$

$$MA(1) : x_t - \mu = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$$

Реша: $Var(x_t) = (1 + b_1^2) \sigma_\varepsilon^2$

$$\gamma(1) = b_1 \sigma_\varepsilon^2$$

ковариация

$$\gamma(k) = 0 \quad \forall k > 1$$

$$\gamma(k) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ b_1(1 + b_1^2), & k = 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases} \quad \text{— между соседними}$$

$b_1 > 0$ — более жаркое

$b_1 < 0$ — менее жаркое

по сравнению с белым шумом

$$\gamma(1) \leq 0,5$$

$$x_t - \mu = b(L) \varepsilon_t$$

$$b(L) = 1 + b_1 L + \dots + b_q L^q$$

$$\gamma(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k} \right) \sigma_\varepsilon^2, & 0 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases} \quad \begin{matrix} b_0 = 1 \\ b_q = 1 \end{matrix}$$

$$\sigma_x^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_q^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\rho(k) = \begin{cases} \left(\sum_{j=0}^{q-k} b_j b_{j+k} \right) / \sum_{j=0}^q b_j^2 & 0 \leq k \leq q \\ 0, & k > q \end{cases}$$

Обратимось к процессам $AR(p)$ и $MA(q)$

$$AR(p): \mu_t = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varepsilon_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}, \quad \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j \right) < \infty$$

(не расходятся)

т.е. $AR(p)$ можно представить в виде $MA(\infty)$

$$\mu_t = \mu + \frac{1}{a(L)} \varepsilon_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

$$\text{т.е. } b(L) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j L^j$$

№2 $MA(1): b = 0,8, E(\mu_t) = 6$

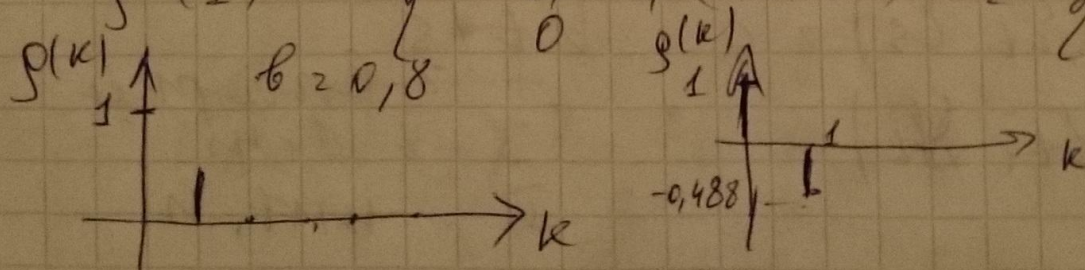
найдем ρ

$$\mu_t = 6 + \varepsilon_t + 0,8 \varepsilon_{t-1}$$

$$\rho(1) = \frac{1 \cdot 0,8}{(1^2 + 0,8^2)} = \frac{0,488}{1} = 0,488$$

теперь если $b = -0,8$

$$\rho(1) = \frac{-0,8 \cdot 1}{(1^2 + 0,8^2)} = \frac{-0,488}{1} = -0,488$$



..... : нахождение на 2 и 3 этапах.

(N3)

MA(2):

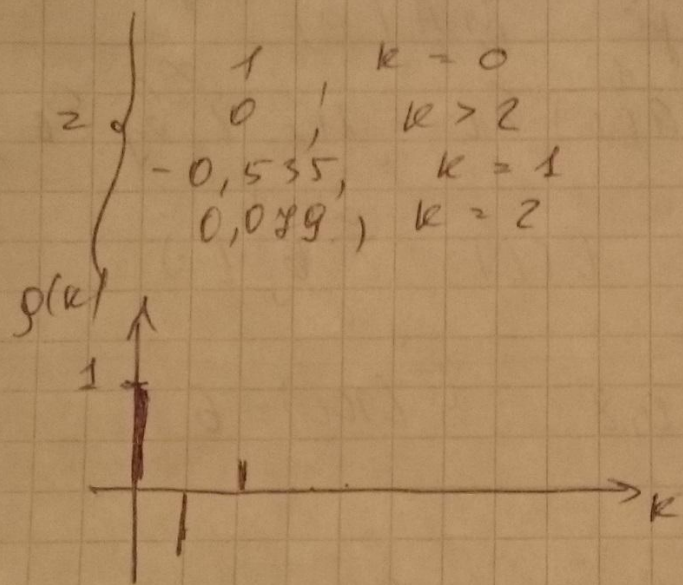
$$x_t = 5 + \varepsilon_t - 0,75 \varepsilon_{t-1} + 0,125 \varepsilon_{t-2}$$

$\rho(k) = ?$ и коррелированность -?

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1 \cdot (-0,75) + (-0,75) \cdot 0,125}{1 + (0,75)^2 + (0,125)^2} & k=1 \\ 0 & k > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - 0,125 \\ 1 + (0,75)^2 + (0,125)^2 \end{cases} \quad k=2$$

$$= \frac{0,125}{1,578}$$



Оценивание

(N1)

$$y_t = a + b x_t + \varepsilon_t$$

$$t = \overline{1, n}$$

x_t - gegeben

$$E(\varepsilon_t) = 0 \quad \text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0 \quad \forall t \neq s$$

$$(x_t, y_t)$$

ε_t unabhängig
 $J : 1, n$
 $\overline{J} : m+1, n$

3.11.2018

Крайнее авторегрессионное скользящее среднее ARMA(p, q)

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j}$$

$$a_p \neq 0 \quad b_q \neq 0 \quad b_0 = 1$$

$$EX_t = 0$$

операторная форма:

$$a(L) = 1 - (a_1 L + a_2 L^2 + \dots + a_p L^p)$$

$$b(L) = 1 + b_1 L + \dots + b_q L^q$$

$$a(L) X_t = b(L) \varepsilon_t$$

если конус среднее $EX_t = \mu \neq 0$

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^p a_j (X_{t-j} - \mu) + \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{t-j}$$

Свойства:

1) крайнее стационарно, если все корни $a(z) = 0$ по модулю меньше 1
все $|z| \leq 1$

2) если крайнее стационарно, то $\exists MA(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varepsilon_{t-j}$$

$$\begin{aligned} c_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} |c_j| < \infty &\text{ - не раскореется} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_t - \mu &= C(L) \varepsilon_t \\ \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j &= \frac{b(z)}{a(z)} \end{aligned}$$

3) если $\sigma_{\epsilon}^2 < \infty$ и $b(z) \neq 0$ вне 1 круга,
то $\exists AR(\infty)$, но если $\sigma_{\epsilon}^2 = \infty$,
то можно представить в виде $AR(\infty)$

$$X_t - \mu = \sum_{j=1}^{\infty} d_j (X_{t-j} - \mu) + \epsilon_t$$

$$d(L)(X_t - \mu) = \epsilon_t$$

$$d(z) = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j = \frac{a(z)}{b(z)}$$

т.е. как смесь шумов в пункте 2)

Все эти ~~уравнения~~ ^{уравнения} можно упростить, чтобы вычислить

ARMA(1,1)

$$\phi(k) = a + \phi(k-1)$$

$$\phi(1) \neq a$$

где $AR(1): \phi(k) = a^k$

$$Z_t = X_t + Y_t \sim ARMA(p_2, q_2)$$

$$ARMA(p_1, q_1)$$

$$Z_t: ARMA(p, q)$$

$$p = p_1 + p_2$$

$$\text{если } p_1 + q_2 > p_2 + q_1 \Rightarrow q = p_1 + q_2$$

$$\text{иначе } \Rightarrow q = q_1 + p_2$$

то max порядок модели

если у $a_x(z)$, $a_y(z)$ есть общие

ARMA(1,1)

коррели то несильно коррелирует

• если X_t и Y_t - $AR(1)$, то
сумма $ARMA(2,1)$

• если X_t и Y_t - MA , то
сумма MA

• если X_t ~~AR~~ AR , Y - MA , то
сумма $ARMA$

Вероятность модели $ARMA(p, q)$

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q b_j \varepsilon_{tj}$$

$a_p \neq 0$ $b_q \neq 0$ $b_0 = 1$ ε_t - белый шум

$SAR(1)$ или $SAM(1)$

сезонная

сезонная

① $X_t = a_4 X_{t-4} + \varepsilon_t$

② $X_t = \varepsilon_t + b_4 \varepsilon_{t-4}$

$a_4 < 1$ - для стаб.

квартальная модель

в ① $\rho(k) = a_4^{k/4}$, $k = 4m$
 $\rho(k) = 0$, $k \neq 4m$
 $m = 0, 1, \dots$

во ② $\rho(0) = 1$

$\rho(4) = b_4$ $\rho(k) = 0, k > 0$

Пример: $AR: a_4 = 0,8$

$MA: b_4 = 0,8$

то будет примерно одинаково.

Адекватная сезонная модель ARMA

а) ARMA(1,4), 1

б) ARMA(1, (1,4))

а) $X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$

б) $X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_4 \varepsilon_{t-4}$

одинаковой решающей если

а) $\hat{a}_1 = 2/3$ $\hat{a}_4 = -1/48$ $\hat{b}_1 = 1/5$

б) $a_1 = 0,4$; $b_1 = 0,3$; $b_4 = 0,8$

проверить на стационарность

а) $X_t = 2/3 X_{t-1} - \frac{1}{48} X_{t-4} + \varepsilon_t + \frac{1}{5} \varepsilon_{t-1}$

$$X_t - \frac{2}{3} X_{t-1} + \frac{1}{48} X_{t-4} = \varepsilon_t + \frac{1}{5} \varepsilon_{t-1}$$

$$1 - \frac{2}{3} z + \frac{1}{48} z^4 = 0 \quad | \cdot 48$$

$$z^4 - 32z + 48 = 0$$

$$z_{1,2} = 2$$

$$z^4 - 32z + 48 = (z-2)^2 (z^2 + az + b)$$

$$(z^2 - 4z + 4)(z^2 + az + b)$$

$$z^4 + az^3 + bz^2 - 4z^3 - 4az^2 - 4bz + 4z^2 + 4az + 4b$$

$$b = \frac{48}{4} = 12$$

$$a = 24$$

арма

$$z^2 + 4z + 12 = 0$$

$$D = 16 - 4 \cdot 12 = -32$$

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 12}}{2} = -2 \pm \sqrt{2}i$$

все корни вне $|z| = 1 \Rightarrow$

~~не~~ стационарен

$$5) 1 - 0,4z = 0$$

$$z = \frac{1}{0,4} = 2,5 > 1$$

$\Rightarrow$ ~~не~~ стационарен

Мультипликативная сезонная модель

$$1) (1 - a_1 L) X_t = (1 + b_1 L)(1 + b_4 L^4) \varepsilon_t$$

$$2) (1 - a_1 L)(1 - a_4 L^4) X_t = (1 + b_1 L) \varepsilon_t$$

$$1) X_t - a_1 X_{t-1} = (1 + b_4 L^4 + b_1 L + b_1 b_4 L^5) \varepsilon_t$$

$$X_t - a_1 X_{t-1} = \varepsilon_t + b_4 \varepsilon_{t-4} + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_1 b_4 \varepsilon_{t-5}$$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + b_4 \varepsilon_{t-4} + b_1 \varepsilon_{t-1} + b_1 b_4 \varepsilon_{t-5}$$

т.е. ARMA(1,5)

$$2) (1 - a_4 L^4 - a_1 L + a_1 a_4 L^5) X_t = (1 + b_1 L) \varepsilon_t$$

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_4 X_{t-4} - a_1 a_4 X_{t-5} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$$

7.6. ARMA(5, 1)

подбор модели ARMA(p, q) по данным X_t
 1) идентификация параметров модели - определяется p, q

2) оценивание параметров
 $\hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_p$
 $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_q$

методы: МНК; ММП

3) диагностика модели: либо оценивается, либо на 1 этап

идентификация:

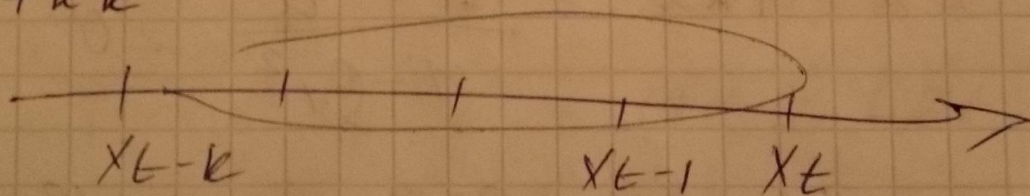
1) AR(p) $k \geq p$

автокорреляция:
 экспоненциально
 затухают

2) MA(q) $k \geq q$ $\rho(k) = 0$

$$\rho(\tau) = \frac{E[(X_t - \mu)(X_{t-\tau} - \mu)]}{\text{Var}(X_t)}$$

частная автокорреляционная ф-ция ρ_{kk}



$$\text{Corr}(X_t - \varphi_{k1} X_{t-1} - \varphi_{k2} X_{t-2} - \dots - \varphi_{kk-1} X_{t-k+1})$$

$\varphi_{k1}, \varphi_{k2}, \dots, \varphi_{kk-1}$

или $\{(\varphi_{kk} - \dots)^2\} \rightarrow m, n$

m.e. given AR(p) $k > p$ $\varphi_{kk} = 0$

$$X_t = \alpha_1 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

a) $X_t = \varphi_{11} X_{t-1} + \varepsilon_t \quad | \cdot X_{t-1}$

$$X_t \cdot X_{t-1} = \varphi_{11} X_{t-1}^2 + \varepsilon_t X_{t-1}$$

$$E(X_t \cdot X_{t-1}) = \varphi_{11} E[X_{t-1}^2] + 0$$

~~Cov~~

$$\gamma(0) = \text{Cov}(X_t, X_t) = E(X_t X_t)$$

$$\rho(1) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{E(X_t \cdot X_{t-1})}{\gamma(0)} = \frac{\varphi_{11} E[X_{t-1}^2]}{\gamma(0)} \quad E(X_t) = 0$$

$$= \frac{\varphi_{11} E(X_{t-1}^2)}{E(X_t X_t)} = \varphi_{11}$$

$$\Rightarrow \rho(1) = \varphi_{11} = \alpha$$

b) $X_t = \varphi_{21} X_{t-1} + \varphi_{22} X_{t-2} + \varepsilon_t \quad | \cdot X_{t-1}$
 X_{t-2}

$$\begin{cases} \rho_1 = \varphi_{21} + \varphi_{22} \rho_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_2 = \varphi_{21} \rho_1 + \varphi_{22} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi_{22} = \frac{\alpha^2 - \alpha^2}{1 - \rho_1^2} = 0$$

и все остальные $\varphi_{kk} = 0$
 уравнение Юла-Дуффера

$$\rho(k) = \alpha_1 \rho(k-1) + \alpha_2 \rho(k-2) + \dots + \alpha_p \rho(k-p) \quad k > 0$$

$$\varphi_{kk} = \frac{\Delta k}{\Delta}$$

κ - вектор

Σx - ковар. м-ца $\vec{x}$, $T \times T$

составительские, но асимптотически
коррелированные

проблема - регресс $T \times T$, ряд
большого ряда не используется

Маленький. отличный. поиск на сетке
grid - search

$$MA(2) : \kappa_t = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \beta_2 \varepsilon_{t-2}$$

$$1) \quad \bar{\kappa} = \hat{E}(\kappa)$$

2) β_1, β_2 - берем максимальную
точную произвольными образом

$$(0,5; 0,5)$$

$$3) \quad \kappa_1 = \bar{\kappa} + \varepsilon_1$$

$$\kappa_2 = \bar{\kappa} + \beta_1 \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

$$\kappa_3 = \bar{\kappa} + \beta_1 \varepsilon_2 + \beta_2 \varepsilon_1 + \varepsilon_3$$

$$\kappa_k = \bar{\kappa} + \beta_1 \varepsilon_{k-1} + \beta_2 \varepsilon_{k-2} + \varepsilon_k$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 = \kappa_1 - \bar{\kappa}$$

$$\varepsilon_2 = \kappa_2 - \bar{\kappa} - \beta_1 \varepsilon_1$$

и считаем $\sum$ квадратов отклонений
 $\sum \varepsilon_t^2 = S(\beta_1, \beta_2)$
некоторой ср-ной от
начальной точки

$$4) (\beta_1^k, \beta_2^k)$$

$$\sum_t \epsilon_t^2 \rightarrow \min_{\beta_1^k, \beta_2^k}$$

β_1^* и β_2^* - наилучшие параметры модели

$$(\beta_1^*, \beta_2^*) = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$$

Аналогично для порядка q :

$$(\beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_q^0)$$

сумма $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю по закону

ARMA(1,1) : МНК + поиск на сетке

сетка = решетка в ячейках

$$\text{ARMA}(2,2) : (1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2) X_t =$$

$$= (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2) \epsilon_t$$

$$X_t = \frac{(1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2)}{(1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2)} \epsilon_t$$

вводит в операторный процесс

$$Z_t = \frac{1}{1 - \alpha_1 L - \alpha_2 L^2} \epsilon_t$$

$$X_t = (1 + \beta_1 L + \beta_2 L^2) Z_t$$

поиск на MA $\Rightarrow$ поиск β_1 и β_2

$$Z_1 = X_1 \quad \text{т.к.} \quad (X_1 = Z_1 + \beta_1 Z_0 + \beta_2 Z_{-1})$$

$$Z_2 = X_2 - \beta_1 Z_1 \quad (X_2 = Z_2 + \beta_1 Z_1 + \beta_2 Z_0)$$

$$z_3 = \kappa_3 - b_1 z_2 - b_2 z_1$$

$$z_t = z_t - a_1 z_{t-1} - a_2 z_{t-2}$$

относительно того наша модель
сдвиг AR(2)

(b_1^0, b_2^0) - заданные и

поисканные $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ по МНК

~~по поиску~~
~~на сетке~~

~~потом минимизируя~~
 ~~Σ квадратов остатков~~

~~$(b_1, b_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$~~

$(b_1^0, b_2^0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$

по поиску МНК
на сетке

$\Sigma e_t^2 \rightarrow$ мин по 4 параметрам
 $(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$

Задача
Дан временный ряд продаж за
12 месяцев года

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
κ_t	70	71	71	72	74	74	79	81	84	88	116	120

- проверить ряд на стационарность
- автокор. построить

(проверка стационарности):

стат. κ_1

$$\sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \kappa_t^2} \sim t/(n-1)$$

если $t > t_k \Rightarrow$ не стационарен

$$\sum_{t=2}^{12} \kappa_t^2 = 82129$$

$$t = 0,81 \quad t_k = t_{(1)} = 3,106$$

$t < t_k \Rightarrow$ не можем отвергнуть гипотезу о стационарности

$$E(\kappa_t) = 83,58 = \frac{1}{12} \sum_{t=1}^{12} \kappa_t$$

$$S_0 = 1$$

$$S^2 = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (\kappa_t - \bar{\kappa})^2 = 266,24$$

$$\rho_1 = 0,623$$

$$\rho_2 = 0,23$$

$$\rho_3 = 0,11$$

$$\rho_4 = 0,008$$

$$\rho_5 = -0,08$$

$$\hat{\rho}_{\kappa} = \frac{1}{TS^2} \sum_{t=KH}^T (\kappa_t - \bar{\kappa}) \cdot (\kappa_t - \bar{\kappa})$$

III) диагностика

1) качество модели в целом

2) некорректируемость остатков
(т.к. предполагаем, что $\varepsilon_t \sim 0$ и.и.)

1) критерии Акаике

$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}^2 + 2 \frac{p+q}{T}$$

Шварца

$$BIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}^2 + \ln T \cdot \frac{p+q}{T}$$

мин $AIC(p, q)$ или мин $BIC(p, q)$
(p, q) (p, q)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{T-p-q} ; \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_t^2}{n}$$

мет. взвешивания соответствия
моделей - по формуле можно
поставить 1 набор, по другому - другой

Акаике - переопределяет порядок
моделей - т.е. оценка не
состоятельная

2) коррекция остатков
Бокс и Пирс

Q-статистика

$$H_0: \hat{\rho}_1 = \hat{\rho}_2 = \dots = \hat{\rho}_m = 0$$

$$H_1: \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 > 0$$

$$Q(m) = T \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_k^2 \sim \chi^2(m)$$

$$Q(m) > \chi^2_{\alpha}(m) \Rightarrow H_0 - \text{отвергается}$$

ARMA(p, q)

$$Q(m) \sim \chi^2_{\alpha}(m-p-q)$$

но она не подходит, если есть AR

Введем увеличенную статистику

$$Q(m) = (T+2) T \sum_{k=1}^m (T-k)^{-1} r_k^2$$

но она тоже несостоятельна

Менее многомерный лагранжиан - тест
Бреймана - Годфри

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \dots + \beta_k x_{kt} + \varepsilon_t$$

x_i - либо фиксированные регрессоры
либо лагированные переменные y

$$\varepsilon_t = \gamma_1 \varepsilon_{t-1} + \gamma_2 \varepsilon_{t-2} + \dots + \gamma_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

$u_t \sim \text{i.i.d.}$

Н₀: $\gamma_1 = \dots = \gamma_p = 0$

Н₁: $\sum_{k=1}^p \gamma_k^2 > 0$

1) $\hat{y}_t = \dots$ по MLE

ε_t - рассчитываемые

2) $\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1t} + \dots + \hat{\beta}_k x_{kt} + \hat{\gamma}_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \hat{\gamma}_p \varepsilon_{t-p}$

т.е. строим регрессию на
старый регрессор + регрессию
на остатки

имеем что ген. регрессоры
лишние

$$TR^2 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \chi^2(p)$$

если $TR^2 < \chi^2(p) \Rightarrow$ Но принимаем,
> Но отвергаем

тогда мы можем применить F-стат.,
если $\varepsilon_t \sim N(0)$

p-value

Тест на нормальность остатков:

Т. Коэрке - Бера

$$S = \frac{1}{T\sigma^3} \sum (\varepsilon_t - \bar{x})^3$$

(3 и 4 моменты)

$$K = \frac{1}{T\sigma^4} \sum (\varepsilon_t - \bar{x})^4 - \text{коэф. Фишера}$$

$$\frac{(T-p-q-1)}{6} \left[S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2 \right] \overset{as}{\sim} \chi^2(2)$$

применяем к большим выборкам

~~Вопрос~~ Вопрос: 1) проверить значимость
коэф. автокорр. с помощью
t-статистики $\alpha = 10\%$

2) определить значимость
коэф. ε_t
(близко к нулю)
m=1, m=2 и т.д.)

если $TR^2 < \chi^2(p) \Rightarrow$ Но принимаем,
> Но отвергаем

так же можно проверить F -стат,
если $\epsilon_t \sim N(0)$

p-value

Тест на нормальность остатков:

Т. Кэрке - Бера

$$S = \frac{1}{T^3} \sum (\epsilon_t - \bar{x})^3$$

(3 и 4 моменты)

$$K = \frac{1}{T^4} \sum (\epsilon_t - \bar{x})^4 - \text{критер. Фисчеца}$$

$$\frac{(T-p-q-1)}{6} \left[S^2 + \frac{1}{4} (K-3)^2 \right] \overset{as}{\sim} \chi^2(2)$$

применение к большим выборкам

~~Реша~~ Реша: 1) проверить значимость
критер. Авмюр. с помощью
t-статистики $\alpha = 10\%$

2) определить значимость
с помощью
(орбит. номеров) $m=1, m=2$ и т.д.)

Домашнее приложение

$$n=2, \quad m=15; T=12; d=10\%$$

$$Q(m) = \prod_{k=1}^m Q_k^2 \sim \chi^2(m)$$

$$H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0$$

$$Q(m) = (T+2) T \sum_{i=1}^m (T-i)^{-1} \rho_i^2$$

$$\chi_{10\%}^2(1) = 2,706$$

$$\chi^2 < Q(1) = 12 \cdot 0,623^2 = 4,654548$$

$$\chi^2 < Q_{yn}(1) = 14 \cdot 12 \cdot \frac{0,623^2}{11} = 5,9277$$

$$\chi^2 < Q(2) = 12 \cdot (0,623^2 + 0,23^2) = 5,2923$$

$$\chi^2 < Q_{yn}(2) = 14 \cdot 12 \cdot \left(\frac{0,623^2}{11} + \frac{0,23^2}{10} \right) = 6,8165$$

$$\chi^2 > Q(3) = 12 (0,623^2 + 0,23^2 + 0,11^2) = 5,4375$$

$$\chi^2 < Q_{yn}(3) = 14 \cdot 12 \left(\frac{0,623^2}{11} + \frac{0,23^2}{10} + \frac{0,11^2}{9} \right) = 7,042$$

$$\chi^2 > Q(4) = 5,438$$

$$\chi^2 > Q(5) = 5,5148$$

$$\chi_{10\%}^2(2) = 4,61$$

$$\chi_{10\%}^2(4) = 7,78$$

$$\chi_{10\%}^2(3) = 6,25$$

$$\chi_{10\%}^2(5) = 9,24$$

$$x^2 > Q_{yn}(4) = 7.043$$

$$x^2 > Q_{yn}(5) = 7.28$$

(28.11.2018)

4 этап: Прогнозирование

1) коэффициенты - зн. θ

2) отсутствующие прошлые значения
наших коэффициентов:

$\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_q$
имеем только прошлые
значения, которые зависят
по нашему ряду

В рамках модели $ARIMA(p, d, q)$
2 типа прогноза

1) условный

2) безусловный

$X_t : t > 0$

$X_{t+\tau} : \underbrace{x_1, \dots, x_{t-p}}$

оригинал
сигнал

$Var(X_{t+\tau} | \text{условия}) = \text{дисперсия}$
 $\uparrow$ точность (дисперсия)
 $\downarrow$ безусловный

предположение:

$a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q$ - точные

предположение ~~не~~ вероятностное,
потому как каждый раз точность
повысится

$E(\hat{\theta}) \neq \theta$ - условие состоятельности
убирается (потому $\neq$)

MMSE - минимум среднеквадратичной
ошибки

$$E \{ \kappa_{t+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \}$$

$$t \in [1, T]$$

$$\text{Var} \{ \kappa_{t+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \}$$

$$\text{MA}(q): \kappa_t = \theta + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + b_q \varepsilon_{t-q}$$

МА(q) предположение:
1) ε_t - независимые

2) ε_t - белый шум, состоящий из T независимых значений

$$E \{ \kappa_{T+1} \} = E \{ \theta + \varepsilon_{T+1} + b_1 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+1} \}$$

$$= \theta = \kappa_{T+1}$$

$$E \{ \kappa_{T+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} = E \{ \theta + b_1 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} =$$

$$= \theta + E \{ \varepsilon_{T+1} \} + E \{ b_1 \varepsilon_T \} + \dots =$$

$$= \theta + 0 + b_1 \cdot 0 + b_2 \varepsilon_{T-1} + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+1}$$

$$= \theta + b_2 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+2}$$

$$E \{ \kappa_{T+2} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} = \theta + b_2 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+2}$$

$$= \tilde{\kappa}_{T+2}$$

$$E \{ \kappa_{T+q} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} = \theta + b_q \varepsilon_T$$

$$E \{ \kappa_{T+q+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} = \theta$$

т.е. при $t > q$ условный прогноз совпадает с безусловным

$$\text{Var} \{ \kappa_{T+1} - \tilde{\kappa}_{T+1} / \kappa_1, \dots, \kappa_T \} = \sigma_\varepsilon^2$$

т.к.

$$\text{Var}\{a_{T+1}\} = E\{a_{T+1}^2 | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} -$$

$$- E^2\{a_{T+1} | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E\{a_{T+1}^2 | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} = E\{(a_{T+1} - \tilde{a}_{T+1})^2 | \dots\}$$

$$= E\left\{\left(\theta + \varepsilon_{T+1} + b_1 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+1} - \left[\theta + b_1 \varepsilon_T + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+1}\right]\right)^2\right\} =$$

$$= E\{(\varepsilon_{T+1})^2 | \dots\} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$E^2\{a_{T+1} | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} = \dots = \cancel{E^2\{\varepsilon_{T+1}\}}$$

$$= E^2\{\varepsilon_{T+1} | \dots\} = 0$$

менее geral 2:

$$\text{Var}\{\kappa_{T+2} - \tilde{\kappa}_{T+2} | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} = (1 + b_1^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$E\{(\kappa_{T+2} - \tilde{\kappa}_{T+2})^2 | \dots\} = E\{(\theta + \varepsilon_{T+2} + b_1 \varepsilon_{T+1} + \dots + b_q \varepsilon_{T-q+2} - \theta - b_1 \varepsilon_T - \dots - b_q \varepsilon_{T-q+2})^2 | \dots\} =$$

$$= E\{(\varepsilon_{T+2} + b_1 \varepsilon_{T+1})^2 | \dots\} =$$

$$= (1 + b_1^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$E^2\{\varepsilon_{T+2} + b_1 \varepsilon_{T+1} | \dots\} = 0$$

т. е.

$$\text{Var}\{\kappa_{T+L} - \tilde{\kappa}_{T+L} | \kappa_1, \dots, \kappa_T\} =$$

$$= \{1 + b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_L^2\} \sigma_\varepsilon^2$$

если $L \leq q$

если $z \gg q$

$$\text{Var} \{ \tilde{x}_{T+z} - \tilde{x}_{T+z} | \dots \} = \text{Var} \{ \tilde{x}_{T+z} - \tilde{x}_{T+z} \}$$

условный прогноз = безусловный

(т.е. наперед превращает в наперед
т.е. наперед переносит вычисление на z
прогноз)

AR(p) : $x_t = \theta + a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t$

$$\tilde{x}_{T+1} = E \{ x_{T+1} | x_1, \dots, x_T \} = \theta + a_1 x_T + \dots + a_p x_{T-p+1}$$

(т.к. уже реализованы T)

$$\tilde{x}_{T+2} = E \{ x_{T+2} | x_1, \dots, x_T \} =$$

$$= E \{ \theta + a_1 x_{T+1} + a_2 x_T + \dots + a_p x_{T-p+2} + \varepsilon_{T+2} | x_1, \dots, x_T \} = \theta +$$

$$+ a_1 E \{ x_{T+1} | x_1, \dots, x_T \} + a_2 x_T + \dots$$

$$+ a_p x_{T-p+2} + \varepsilon_{T+2} = \theta + a_1 \tilde{x}_{T+1} +$$

$$+ a_2 x_T + \dots + a_p x_{T-p+2} + \varepsilon_{T+2}$$

Если $\tilde{x}_{T+z} = \lim_{T \rightarrow \infty} E \{ x_{T+z} | x_1, \dots, x_T \} =$

$$= \frac{\theta}{1 - a_1 - \dots - a_p}$$

— т.е. наперед
безусловный
прогноз

в других случаях Var не реализуется — слишком плохо

AR(2) : $x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + \varepsilon_t$

$$\tilde{x}_{T+1} = \alpha_1 x_T + \alpha_2 x_{T-1}$$

$$x_{T+1} = \alpha_1 x_T + \alpha_2 x_{T-1} + \varepsilon_{T+1}$$

$$\text{Var} \{ x_{T+1} - \tilde{x}_{T+1} \} = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\tilde{x}_{T+2} = \alpha_1 \tilde{x}_{T+1} + \alpha_2 x_T$$

$$x_{T+2} = \alpha_1 x_{T+1} + \alpha_2 x_T + \varepsilon_{T+2} =$$

$$= \alpha_1 (\alpha_1 x_T + \alpha_2 x_{T-1} + \varepsilon_{T+1}) + \alpha_2 x_T + \varepsilon_{T+2}$$

$$\text{Var} \{ x_{T+2} - \tilde{x}_{T+2} \} = (1 + \alpha_1^2) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{Var} \{ \alpha_1^2 x_T + \alpha_1 \alpha_2 x_{T-1} + \alpha_1 \varepsilon_{T+1} +$$

$$+ \alpha_2 x_T + \varepsilon_{T+2} - \alpha_1^2 x_T - \alpha_1 \alpha_2 x_{T-1} -$$

$$- \alpha_2 x_T \mid x_1, \dots, x_T \} = \text{Var} \{ \alpha_1 \varepsilon_{T+1} +$$

$$+ \varepsilon_{T+2} \mid x_1, \dots, x_T \} = (\alpha_1^2 + 1) \sigma_\varepsilon^2$$

$$\text{Var} \{ x_{T+3} - \tilde{x}_{T+3} \} = (1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 +$$

$$+ 2\alpha_1^2 \alpha_2 + \alpha_1^4) \sigma_\varepsilon^2$$

$$AR(p) \rightarrow MA(\infty) \text{ — сходящаяся цепочка}$$

$$x_t = \theta + \varepsilon_t + \varphi_1 \varepsilon_{t-1} + \dots + \varphi_q \varepsilon_{t-q} + \dots$$

$$\sigma_\varepsilon^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i^2 \quad (\varphi_0 \equiv 1)$$

$$ARMA(1, 1) : x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \varepsilon_t + \beta_1 \varepsilon_{t-1}$$

сходящаяся к $MA(\infty)$

тогда ошибка на шаге τ :

$$\sigma_{\varepsilon}^2 \sum_{i=0}^{\tau-1} \eta_i^2 = \sigma_{\varepsilon}^2 \left[\sum_{i=0}^{\tau-1} \alpha_1^{2i} (a_1 + b_1)^2 + 1 \right] =$$

где

$$\eta_k = \alpha_1^{k-1} (a_1 + b_1)$$
$$= \sigma_{\varepsilon}^2 \left[\frac{(a_1 + b_1)(1 - \alpha_1^{2\tau})}{1 - \alpha_1^2} + 1 \right]$$

если данные прогноза тем
дисперсия точности прогноза
→ к безусловной

Можно разделить выборку на
2 части:

по $[1, n]$ - обучим модель

по $[n+1, T]$ - проведем диагностику
проверим качество $\hat{f}$

это наз-ся построение

Литература:
Носко. & Плещин

Кандорович - лекции ВМиЭ

Дугерти - в новых изданиях
(лет 3 назад)

Грин (Green) | 1993

Goldberg (1990)

Красиника Экономика -
применение моделей

Дж. Берну

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & & & \rho_{k-2} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ \rho_{k-1} & \dots & \dots & \dots & \end{vmatrix}$$

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \dots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & & & \rho_{k-2} \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \dots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}$$

Вывод: $\rho_{kk} \neq 0$, если $k \leq p$
 $\rho_{kk} = 0$, если $k > p$

ARMA(p, q)

ARMA(1, 1)

MA(∞) - ?

$$X_t = a_1 X_{t-1} + \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$$

Условие: $a(z) \neq 0 : |z| > 1$

$$(1 - a_1 L) X_t = (1 + b_1 L) \varepsilon_t$$

$$X_t = \frac{(1 + b_1 L)}{(1 - a_1 L)} \varepsilon_t =$$

$$= (1 + a_1 L + a_1^2 L^2 + \dots)(1 + b_1 L) \varepsilon_t =$$

$$= (1 + (a_1 + b_1)L + (a_1 b_1 + a_1^2)L^2 + \dots)$$

$$+ (a_1^2 b_1 + a_1^3) (1 + \dots) \varepsilon_t$$

$$\text{Var}(X_t) = (1 + L(b_1 + a_1) + L^2(a_1 b_1 + a_1^2) + \dots) \sigma_\varepsilon^2 =$$

$$= \left[1 + \frac{(a_1 + b_1)^2}{1 - a_1^2} \right] \sigma_\varepsilon^2 = \frac{1 + b_1^2 + 2a_1 b_1}{1 - a_1^2} \sigma_\varepsilon^2$$

$$r(2) = a_1 r(1)$$

$$r(k+1) = a_1 r(k)$$

$$\Rightarrow \rho(k+1) = a_1 \rho(k)$$

ARMA(p, q)

$\phi_1, \dots, \phi_p \}$ AR + ~~MA~~ MA

$k > \max(p, q+1)$ AR

Классические модели

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$$

$$\Delta X_t = \varepsilon_t$$

случ.

$$X_t = a + bt + ct^2 + \varepsilon_t$$

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = b + c(t^2 - (t-1)^2) + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta X_t^2 = b + 2ct - c + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$$

$$\Delta X_t^2 = \Delta X_t - \Delta X_{t-1} = b + 2ct - c + \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1} - (b + 2c(t-1) - c + \varepsilon_{t-1} - \varepsilon_{t-2}) =$$

$$= 2c + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-2} - 2\varepsilon_{t-1}$$

линейные стационарные процессы
ARIMA (p, d, q)

авторегрессионно
интегрированное
скользящее
среднее

$$\Phi_p(L) \Delta^d X_t = \Theta_q(L) \varepsilon_t$$

$$\underbrace{\Phi_p(L) (1-L)^d}_{p+d} X_t = \Theta_q(L) \varepsilon_t$$

обычно для
модели $d \leq 2$ и $p+q \leq 3$

Синтез

$$\text{н1. } X_t = 2,435 + \varepsilon_t + 3,9 \varepsilon_{t-1} - 0,847 \varepsilon_{t-2} + 0,51 \varepsilon_{t-3}$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = 1$$

$$\sigma_X^2 = (1 + 3,9^2 + (-0,847)^2 + 0,51^2) \cdot 1 = 17,187509$$

$$\rho(k) = \frac{1 \cdot 3,9 + 3,9(-0,847) + (-0,847) \cdot 0,51}{1^2 + 3,9^2 + 0,847^2 + 0,51^2} = 0,009 \quad k=1$$

$$\frac{1 \cdot (-0,847) + 3,9 \cdot 0,51}{1^2 + 3,9^2 + 0,847^2 + 0,51^2} = 0,66, \quad k=2$$

$$\frac{0,51 \cdot 1}{1^2 + 3,9^2 + 0,847^2 + 0,51^2} = 0,03, \quad k=3$$

$$0, \quad k \geq 4$$

$$N2. \quad X_t = 0,92 X_{t-1} + \varepsilon_t - 0,08 \varepsilon_{t-1}$$

1) стационарно?

$$1 - 0,92z = 0 \quad z > 1 \Rightarrow \text{стационарно}$$

$$2) \quad \frac{b(z)}{a(z)} = \frac{1 - 0,08z}{1 - 0,92z} \quad (=)$$

должно делиться в $MA(\infty)$

$$-0,08z + 1$$

$$-0,92z + 1$$

$$0,84z$$

$$0,84z - 0,7728z^2$$

$$0,7728z^2$$

$$0,7728z^2 - 0,7109z^3$$

$$0,7109z^3$$

$$(\Rightarrow) \quad 1 + 0,84z + 0,7728z^2 + 0,712z^3 + \dots$$

$$X_t = (1 + 0,84z + 0,7728z^2 + \dots) \varepsilon_t$$

$$C_0 = 1$$

$$C_1 = a_1 + b_1$$

$$C_2 = a_1 \cdot C_1$$

$$C_3 = a_1^2 \cdot C_1$$

$$C_4 = a_1^3 C_1$$

$$C_k = a_1^{k-1} C_1$$

общий вид
коэффициентов

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1) a_1^{j-1} \varepsilon_{t-j}$$

3) можно ли преобразовать в AR(∞)

$$b(z) = 0$$

$$1 - 0,08z = 0$$

$z = 12,5$
 $z > 1$ - можно
 преобразовать
 в AR(∞)

$$\frac{a(z)}{b(z)} = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} d_j z^j$$

$$-d_1 \stackrel{d_0=1}{=} -(a_1 + b_1)$$

$$-d_2 = -b_1 \cdot d_1$$

$$-d_3 = b_1^2 d_1$$

$$-d_4 = -b_1^3 d_1$$

$$-d_1 = -0,84 \quad -d_2 = -0,0672$$

$$-d_3 = -0,0053$$

$$-d_4 = -0,00043$$

$$\varepsilon_t = X_t (1 + 0,84 + 0,0672 + 0,0053 + 0,00043 + \dots)$$

$$X_t = \varepsilon_t + 0,84 X_{t-1} + 0,0672 X_{t-2} + 0,0053 X_{t-3} + 0,00043 X_{t-4} + \dots$$

$$X_t = \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{\infty} (a_1 + b_1) b_1^{j-1} X_{t-j}$$

Бокс-Дженкинс

18.11.2017

1) идентификация модели

1.1. $d \leq 2$

1.2. p, q

$p+q \leq 3$
(если без сезонных колебаний)

2) оценка параметров - МНК, ММП

$\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_p, \hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_q$ (поиск наилучших значений)

3) диагностика модели (значимость модели, провер.)

4) использование модели - построение прогноза по минимальным данным

$x_t = \alpha x_{t-1} + \varepsilon_t$ - взрывной типа

$\alpha = 1$
 $\alpha > 1$ - не стационарный - не получится сделать

$x_t, t = \overline{1, n}$ - серия случайных параметров:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n x_t$$

$$s^2 = \text{Var } x_t = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2$$

$$\hat{\rho}_k = \frac{1}{n s^2} \sum_{t=k+1}^n (x_t - \bar{x})(x_{t-k} - \bar{x})$$

если брать не T , а $T-k$ - можно получить все возможные корреляционные матрицы - плохо при T - корр. матрица

для расчёта выборки не берутся

$k > \frac{T}{4}$ - если есть уже не достаточно точные ну-го моментные выборки
выборочные автокор.

1) при $k > q$ $\hat{\rho}_k \rightarrow 0$ MA(q)

2) при $k > p$ $\hat{\varphi}_{kk} \rightarrow 0$ AR(p)
выборочные частотные коэф.

3) $\hat{\rho}_{k1} \rightarrow 0$
 $\hat{\varphi}_{k2} \rightarrow 0 \Rightarrow ARMA(p, q)$

$x_t \sim MA(q)$ $\varepsilon_t \sim N(0)$

$k > q$ T большие
 $E(\hat{\rho}_k) = 0$ $Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{T}$ при $k=1$ MA(1)
 $Var(\hat{\rho}_k) \approx \frac{1}{T} (1 + 2 \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j^2)$

$H_0: \hat{\rho}_k = 0$ $k > q$ для MA

$H_0: \hat{\varphi}_{kk} = 0$ $k > p$ для AR

$E(\hat{\varphi}_{kk}) = 0$

$Var(\hat{\varphi}_{kk}) \approx \frac{1}{T}$ $k=1$ AR(1)

$Var(\hat{\varphi}_{kk}) = \sqrt{T} \varphi_{kk} \sim N(0, 1)$

AR(p): $x_t = a_1 x_{t-1} + \dots + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t$ $k > p$

$\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_p$ - оцененные
составляющие $E\hat{\theta} \neq 0$
б.и. $\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{\theta} = \theta$

$$\kappa_t, t = \overline{1, T} \sim N(\cdot)$$

$$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_p \sim N(\cdot)$$

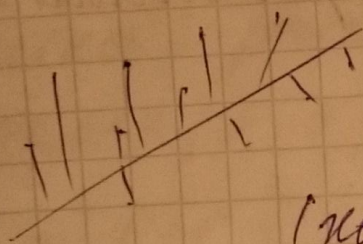
проверка белого шума по классическим моделям

если мост. описание $\neq 0$, то
либо со свободным членом,
либо $\kappa_t - \bar{\kappa}$

$$\bar{\kappa} = \frac{1}{T} \sum \kappa_t$$

$$\vec{\mu} = \frac{\vec{\Phi}}{1 - \vec{a}_1 - \dots - \vec{a}_p} \quad \left. \begin{array}{l} \text{сост.} \\ \text{дл. корней} \end{array} \right\}$$

$$MA(q) : \kappa_t = \sum_{k=1}^q \beta_k \Phi_{t-k} \quad \text{модель процесса с параметрами}$$



- средн. отклонения
были минимальны

$$(\kappa_t - (a_1 \kappa_{t-1} + \dots + a_p \kappa_{t-p}))^2$$

$$L(\kappa_1, \dots, \kappa_T, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_\varepsilon^2) =$$

$$= p(\kappa_1, \dots, \kappa_T, \beta_1, \dots, \beta_q, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\ln(L)$$

можно сказать, что это функция
качества

если Σ_{t-k} - распределены по
нормальному закону, то

$$L(\vec{\beta}_1, \dots, \vec{\beta}_q, \sigma_\varepsilon^2 | \kappa_1, \dots, \kappa_T) = \frac{1}{(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{T/2} (\det \Sigma_X)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{(\kappa - \bar{\kappa})^T \Sigma_X^{-1} (\kappa - \bar{\kappa})}{2\sigma_\varepsilon^2} \right\}$$